1.8.1 Mnohočleny, sčítání a odčítání mnohočlenů

Předpoklady: 010702

Mnohočlen = zvláštní typ výrazů. $\Rightarrow$ Jak ho poznáme?
Mnohočleny obsahují pouze přirozené mocniny neznámých (jedné nebo více) a konstanty.

Př. 1: Rozhodni, které z následujících výrazů jsou mnohočleny.

a) $x^2y^2-2x^2+3y$ b) $x^2-\frac{3}{4x}+8$

c) $x^2+3y\sqrt{x}+y^2$ d) $x^2-\frac{3}{4}x+\sqrt{3}$

a) $x^2y^2-2x^2+3y$ - je mnohočlen dvou proměnných.

b) $x^2-\frac{3}{4x}+8$ - není mnohočlen (*x* je ve jmenovateli $\Rightarrow$ záporná mocnina x).

c) $x^2+3y\sqrt{x}+y^2$ - není mnohočlen (obsahuje odmocninu z *x*).

d) $x^2-\frac{3}{4}x+\sqrt{3}$ - je mnohočlen (obsahuje zlomek, ale bez neznámé ve jmenovateli, podobně pod odmocninou není neznámá a jde tedy jen o konstantu).

I mnohočleny mají přesnou definici.

Pedagogická poznámka: Zadání následujícího příkladu žáci vidí tak maximálně minutu, předem říkám, že v něm musí najít pravidelnosti, podle kterých by pak dokázali přepsat definici z hlavy. Na tupé nabouchání do hlavy čas nestačí.

Př. 2: Přečti si definici mnohočlenu, tak abys ji byl schopen po schování textu napsat zpaměti do sešitu.
"Mnohočlen (Polynom) s jednou proměnou je výraz, který se dá zapsat jako: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+......+a_2x^2+a_1x^1+a_0$, kde $a_0;a_1;a_2;...;a_n$ jsou reálná čísla, *n* je celé nezáporné číslo a *x* je proměnná."

Pravidelnosti a logické postřehy:

- Části (správně členy) mají tvar a_nx^n, číslo *n* u *x* je mocnina, u konstanty *a* jde o dolní index (rozlišující jednotlivá *a* od sebe),
- členy jsou stejné, pouze se zmenšuje číslo *n* na $n-1$, $n-2$, … (postupně se zmenšují mocniny *x*),
- řada končí členy $a_1x^1+a_0$ (zřejmě se nepíše zbytečné $x^0=1$),
- *x* je proměnná (jako obvykle),
- *n* je celé nezáporné číslo (vystupuje jako mocnina mnohočlenu, nulu přidáváme kvůli poslednímu členu),
- a_i jsou reálná čísla (mocniny *x* můžeme násobit čímkoliv).

Přesná definice mnohočlenu s jednou proměnnou

Mnohočlen (Polynom) s jednou proměnou je výraz, který se dá zapsat jako:
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, kde $a_0; a_1; a_2; ...; a_n$ jsou reálná čísla, *n* je celé nezáporné číslo a *x* je proměnná.

Názvosloví

je-li $a_n \neq 0$	říkáme, že mnohočlen je „*n*-tého stupně“, *n* je pak stupeň mnohočlenu
$a_n, a_{n-1}, ...a_2, a_1, a_0$	koeficienty mnohočlenu (pouze reálná čísla před mocninou neznámé)
$a_n x^n, a_1 x^1$	členy mnohočlenu = součin koeficientu s odpovídající mocninou neznámé (obecně se to píše takto: člen mnohočlenu je výraz ve tvaru $a_k x^k$, kde $0 \leq k \leq n$)
a_0	absolutní člen
$a_1 x^1 = a_1 x$	lineární člen
$a_2 x^2$	kvadratický člen
$a_3 x^3$	kubický člen
$a_1 x^1 + a_0$	lineární mnohočlen (mnohočlen 1. řádu, častěji se píše místo $a_1 x + a_0 \to ax + b$)
$a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	kvadratický mnohočlen (mnohočlen 2. řádu, častěji se píše místo $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \to ax^2 + bx + c$)

Pedagogická poznámka: Žáci tabulku neopisují. Údaje z ní si připisují pomocí šipek do definice. Ušetří se tak hodně času.

Pedagogická poznámka: Vždycky si povídáme o tom, že pojmenování členů je logické: absolutní = neměnný (bez proměnné), lineární = lineární funkce, kvadratický = blbnout na kvadrát, kubický = kubík vody (objemová jednotka).

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady mohou působit zbytečně, ale zkušenost jednoznačně ukazuje, že obecné zápisy dělají studentům obrovské problémy. Ačkoliv se s nimi v učebnicích setkávají poměrně často (nebo by se spíš setkávat měli), jen velmi málo z nich se snaží jakýmkoliv způsobem interpretovat, co vlastně znamenají (jak se jasně ukáže, když je necháte následující příklad samostatně vyřešit).

Př. 3: Je dán mnohočlen $-x^3 + 2x^2 - \pi x + 3$. Urči jeho stupeň a jeho koeficienty a_0, a_1, a_2 a_3. Napiš jeho kvadratický člen.

Napíšeme si pod sebe obecný tvar a konkrétní mnohočlen, porovnáním získáme hodnoty koeficientů.

$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$-x^3 + 2x^2 - \pi x + 3$

Z porovnání je zřejmé, že platí:

$a_3 = -1$, $a_2 = 2$, $a_1 = -\pi$, $a_0 = 3$,

kvadratický člen: $2x^2$.

Př. 4: Je dán mnohočlen $3x^4-2x^2+3$. Urči jeho stupeň a všechny jeho koeficienty (tedy čísla $a_n, a_{n-1}, ...a_2, a_1, a_0$). Urči hodnotu koeficientu a_{n-2}.

n $\quad n=4$ (protože nejvyšší mocnina x je čtvrtá)

$a_4 = a_n = 3$

a_3 ($a_3 = a_{n-1}$) $a_3 = 0$ (mnohočlen neobsahuje žádný člen s x^3)

a_2 $\quad a_2 = -2$ (před x^2 je –2)

a_1 $\quad a_1 = 0$ (a_1 je vždy před x a když tam x není tak to znamená, že je vynásobené nulou a tedy $a_1 = 0$)

a_0 $\quad a_0 = 3$ (a_0 je koeficient bez x)

a_{n-2} $\quad a_{n-2} = a_{4-2} = a_2 = -2$

Pedagogická poznámka: Žáci většinou napíší koeficienty s konkrétním indexem. Koeficienty s *n* pak doděláváme s nápovědou od tabule.

Pedagogická poznámka: Ve zbytku hodiny už máme přepnuto jen na zadání příkladů. Žáci dokáží postupovat sami.

Seřazení mnohočlenu

Je zvykem zapisovat jednotlivé členy mnohočlenu v pořadí podle mocnin, s nejvyššími mocninami na začátku. Dodržování této konvence usnadňuje zápis, jeho kontrolu a urychluje počítání.

My budeme všechny mnohočleny uvádět seřazené.

Př. 5: Seřaď mnohočleny do konvenčního pořadí:

a) $2x-x^2\sqrt{3}+2+x^4$ b) $x^2y-2x+4x^3+2xy+2-3x^2$

a) $2x-x^2\sqrt{3}+2+x^4 = x^4-x^2\sqrt{3}+2x+2$

b) $x^2y-2x+4x^3+2xy+2-3x^2 = 4x^3+x^2y-3x^2+2xy-2x+2$

Opačný mnohočlen

Koeficienty opačného mnohočlenu jsou čísla opačná ke koeficientům původního mnohočlenu.

Př. 6: Najdi opačný mnohočlen k mnohočlenu x^4-3x^2+2x-1.

Opačný mnohočlen: $-x^4+3x^2-2x+1$.

Součet mnohočlenů

Mnohočleny sečteme tak, že sečteme koeficienty odpovídajících si členů mnohočlenu (členy se stejnou mocninou *x* pokud máme jednu neznámou, pokud je neznámých víc, musí být stejné mocniny všech).

Př. 7: Sečti mnohočleny.

a) x^4+2x^2-3x+5 a $3x^3-2x^2+x-4$

b) $3x^2 - xy + 2x - 2$ a $4x^2y - 2xy - \sqrt{3}x + 3$

Urči koeficient a_1 u výsledných mnohočlenů.

a)

$x^4 + 2x^2 - 3x + 5 + \left(3x^3 - 2x^2 + x - 4\right) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$

Koeficient a_1 je reálné číslo, které se nachází u x $\Rightarrow$ $a_1 = -2$.

b)

$3x^2 - xy + 2x - 2 + \left(4x^2y - 2xy - \sqrt{3}x + 3\right) = 3x^2 + 4x^2y - xy - 2xy + 2x - \sqrt{3}x - 2 + 3 =$

$3x^2 + 4x^2y - 3xy + \left(2 - \sqrt{3}\right)x + 1$

Koeficient a_1 je reálné číslo, které se nachází u x $\Rightarrow$ $a_1 = 2 - \sqrt{3}$.

Rozdíl mnohočlenů

Mnohočleny odečteme tak, že k prvnímu mnohočlenu přičteme mnohočlen opačný k druhému (odečítanému) mnohočlenu.

Př. 8: Urči rozdíl mnohočlenů.

a) $\left(x^4 + 2x^2 - 3x + 5\right) - \left(3x^3 - 2x^2 + x - 4\right)$

b) $\left(3x^2 - xy + 2x - 2\right) - \left(4x^2y - 2xy - \sqrt{3}x + 3\right)$.

a)

$\left(x^4 + 2x^2 - 3x + 5\right) - \left(3x^3 - 2x^2 + x - 4\right) = x^4 + 2x^2 - 3x + 5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 4 =$

$= x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 9$

b)

$3x^2 - xy + 2x - 2 - \left(4x^2y - 2xy - \sqrt{3}x + 3\right) = 3x^2 - xy + 2x - 2 + \left(-4x^2y + 2xy + \sqrt{3}x - 3\right) =$

$= 3x^2 - 4x^2y - xy + 2xy + 2x + \sqrt{3}x - 2 - 3 = 3x^2 - 4x^2y + xy + \left(2 + \sqrt{3}\right)x - 5$

Příště už budeme počítat bez mezikroku, rovnou:

$\left(x^4 + 2x^2 - 3x + 5\right) - \left(3x^3 - 2x^2 + x - 4\right) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 9$.

Př. 9: Zjednoduš.

a) $2x^2 + 3x - 2 + 2\left(x^2 + 1\right) - \left(3x^2 - 2x + 1\right)$

b) $2x^4 - 3x + x\left(x^3 - 2x + 2\right) - x^2\left(3x^2 - x - 2\right)$

a) $2x^2 + 3x - 2 + 2\left(x^2 + 1\right) - \left(3x^2 - 2x + 1\right) = 2x^2 + 3x - 2 + 2x^2 + 2 - 3x^2 + 2x - 1 =$

$= 2x^2 + 2x^2 - 3x^2 + 3x + 2x - 1 - 2 + 2 = x^2 + 5x - 1$

b) $2x^4-3x+x\left(x^3-2x+2\right)-x^2\left(3x^2-x-2\right)=2x^4-3x+x^4-2x^2+2x-3x^4+x^3+2x^2=$
$2x^4+x^4-3x^4+x^3-2x^2+2x^2-3x+2x=x^3-x$

Shrnutí: Mnohočlen je speciální typ výrazu, kde jsou neznámé pouze v přirozených mocninách.